Discrétisation des problèmes d'optimisation stochastique et synthèse de feedback

Kengy Barty

CERMICS-ENPC

22 juillet 2004

Plan

Plan

Plan

1. Discrétisation d'un problème en information statique
2. Une propriété de Lipschitz pour les critères découplés
3. Heuristique "visant à s'affranchir de la quantification"
4. Conclusions

Plan

1. Discrétisation d'un problème en information statique
2. Une propriété de Lipschitz pour les critères découplés
3. Heuristique "visant à s'affranchir de la quantification"
4. Conclusions

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\min_{x,u} \mathbb{E} \overbrace{\left(K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \right)}^{J(u(\xi),\xi)} \\
x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\
x_0 = \eta(\xi_0) \\
u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle}
\end{array}
\right.
$$

u_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$-mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.

$$\begin{cases} \min_{x,u} \mathbb{E} \overbrace{\left(K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \right)}^{J(u(\xi),\xi)} \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \ldots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{cases}$$

u_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \ldots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$-mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \ldots, \xi_t)$.

$$
\begin{cases}
\min_{x,u} \mathbb{E} \overbrace{\left(K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \right)}^{J(u(\xi),\xi)} \\
x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\
x_0 = \eta(\xi_0) \\
u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle}
\end{cases}
$$

u_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$-mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.

$$\left\{\begin{array}{l} \min_{x,u} \mathbb{E}\overbrace{\left(K(x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t)\right)}^{J(u(\xi),\xi)} \\ x_{t+1} = F(x_t, u_t, \xi_{t+1}, t) \\ x_0 = \eta(\xi_0) \\ u_t = f_t(\xi_0, \dots, \xi_t) \text{ Contrainte Informationnelle} \end{array}\right.$$

u_t est $\mathcal{B}_t$-mesurable, avec $\mathcal{B}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$

u_t est $\sigma(h_t)$-mesurable avec $h_t : \xi \mapsto (\xi_0, \dots, \xi_t)$.

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E} J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape Deuxième étapeTroisième étape

$$\begin{cases} \min \mathbb{E} J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(Q_k \circ h)\text{-mesurable} \end{cases}$$

Discrétisation de la contrainte de mesurabilité

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E} J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape Deuxième étape Troisième étape

$$\begin{cases} \min \mathbb{E} \tilde{J}(u, \xi) \\ u \in \mathbb{R}^K \end{cases}$$

Formulation d'un problème en boucle ouverte

Discrétisation

Problème type

$$\begin{cases} \min \mathbb{E} J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \sigma(h) \text{ mesurable} \end{cases}$$

Première étape Deuxième étape Troisième étape

$$\begin{cases} \min \int \tilde{J}(u, \xi) \mathbb{P}^n(d\xi, \zeta) \\ u \in \mathbb{R}^K \end{cases}$$

Technique de Monte-Carlo

Discrétisation de la contrainte "u est $\sigma(h)$-mesurable"

Soient $Q_k : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ tel que $S_k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{card}(\operatorname{im} Q_k) < \infty$, $\operatorname{im} Q_k = \{y_1, \ldots, y_{S_k}\}$ et $j = 1, \ldots, S_k$:

$$C_j^k \overset{\text{def}}{=} \{\xi \in \Xi \mid Q_k(h(\xi)) = y_j\} \ ;$$

alors $(C_j^k)_{j=1,\ldots,S_k}$ est une partition de Ξ.

Contrainte discrète

$$u \text{ est } \sigma(Q_k \circ h) \text{ mesurable} \Leftrightarrow u(\xi) = \sum_{j=1}^{S_k} u_j \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi).$$

Problème discret "équivalent" en boucle ouverte

Problème discret après quantification

Pour $u = (u_1, \dots, u_{S_k}) \in K^{S_k}$ soit :

$$V(Q_k) = \min_{u \in K^{S_k}} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi)\mathbb{I}_{C_j^k}(\xi)\right].$$

Intégration par rapport à une loi discrète

Problème discret après Monte-Carlo

$$V_n(Q_k) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u_j} \int \sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi) \mathbb{I}_{C_j^k}(\xi) \mathbb{P}^n(d\xi, \zeta).$$

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

Étude de la convergence

$$|V - V_n(Q_k)| \leq \underbrace{|V - V(Q_k)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V(Q_k) - V_n(Q_k)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

Hypothèses Wets et Dupačovà 1988

- $S \overset{\text{def}}{=} \mathrm{dom} J(\cdot, \xi)$ est indépendant de ξ ;
- $\forall u, \quad J(u, \cdot)$ est continue ;
- $J(\cdot, \xi)$ est lipschitzienne sur S ;
- $(Z, \mathcal{Z}, \lambda)$ espace d'échantillons ;
- $(\mathcal{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite croissante de sous tribus de $\mathcal{Z}$;
- $\forall \zeta \in Z, \quad \mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ mesure discrète sur des tirages indépendants de ξ ;
- $\mathbb{P}^n(A, \cdot)$ est $\mathcal{Z}^n$ mesurable.

Glivenko Cantelli

$$(\Xi^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{\Xi}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\mathbb{N}}), \quad \zeta = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i}$$

$(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la loi de ξ pour presque tout ζ.

$$V_n(Q_k) = \min_{u_j} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{S_k} J(u_j, \xi_\ell)\mathbb{I}_{C_j^k}(\xi_\ell)$$

Glivenko Cantelli

$$(\Xi^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}_{\Xi}^{\mathbb{N}}, \mathbb{P}^{\mathbb{N}}), \quad \zeta = (\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\xi_i}$$

$(\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la loi de ξ pour presque tout ζ.

$$V_n(Q_k) = \min_{u_j} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{S_k} J(u_j,\xi_\ell)\mathbb{I}_{C_j^k}(\xi_\ell)$$

Erreur de Monte-Carlo

Résultat

Sous Wets et Dupačovà et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers $\mathbb{P}$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$

Erreur de Monte-Carlo

Résultat

Sous Wets et Dupačovà et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers $\mathbb{P}$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$

Erreur de Monte-Carlo

Résultat

Sous Wets et Dupačovà et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers $\mathbb{P}$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$

Erreur de Monte-Carlo

Résultat

Sous Wets et Dupačovà et si

- $\mathbb{P}(\xi \in \partial C_j^k) = 0$;
- $\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta)$ converge en loi p.s vers $\mathbb{P}$

alors :

$$\lim_{n \to \infty} V_n(Q_k) = V(Q_k).$$

Erreur de quantification

Résultat

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} V(Q_k) = V$$

Erreur de quantification

Résultat

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k\to\infty} V(Q_k) = V$$

Erreur de quantification

Résultat

On suppose que

- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- Le critère est continu par rapport aux variables de décisions

alors

$$\lim_{k\to\infty} V(Q_k) = V$$

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, C))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
-

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
- Hypothèses de Wets Dupačovà sont satisfaites.

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}|V - V_n(Q_k)| = 0$$

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
- Hypothèses de Wets Dupačovà sont satisfaites.

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}|V - V_n(Q_k)| = 0$$

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
- Hypothèses de Wets Dupačovà sont satisfaites.

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot,\zeta))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
- Hypothèses de Wets Dupačovà sont satisfaites.

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \lim_{n\longrightarrow\infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$

Erreur globale

$$|V - V_n(Q_k)| \leq |V - V(Q_k)| + |V(Q_k) - V_n(Q_k)|$$

Résultat

- $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ à un nombre fini de valeurs ;
- $(Q_k \circ h)_{k \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers h ;
- $(\mathbb{P}^n(\cdot, \zeta))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $\mathbb{P}$;
- Hypothèses de Wets Dupačovà sont satisfaites.

$$\lim_{k \to \infty} \lim_{n \to \infty} |V - V_n(Q_k)| = 0$$

Propriété de Lipschitz

$J_1 \in L^1_{\mathbb{R}^n}(\Xi)$, $J_2 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et Γ $\mathcal{B}$-mesurable, nous notons alors :

$$J(u,\xi) = \langle J_1(\xi), J_2(u) \rangle, \quad J_1 \in L^p$$

$$V(\mathcal{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_u \left\{ \mathbb{E}\left[J(u(\xi),\xi)\right] \mid u(\xi) \in \Gamma(\xi), u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \right\}$$

est continue[a] et :

$$\left| V(\mathcal{B}) - V(\mathcal{B}') \right| \leq L \left|\left| \mathbb{E}\left(J_1 \mid \mathcal{B}\right) - \mathbb{E}\left(J_1 \mid \mathcal{B}'\right) \right|\right|_{L^p_{\mathbb{R}^n}(\Xi)}$$

avec $L = \sup_{\{u \mid u(\xi) \in \Gamma(\xi)\}} \left|\left| J_2(u) \right|\right|_{L^q}$.

[a] Et même lipschitzienne pour la topologie forte !

Application numérique

- $\underline{x} \leq x(t) \leq \overline{x}$ volume d'eau en stock à l'instant t ;
- $w(t)$ apport d'eau dans le barrage ;
- $v(t) = \min\left(u(t), x(t) + w(t+1) - \underline{x}\right)$ volume d'eau turbiné ;
- $x(t+1) = \min\left(x(t) - v(t) + w(t+1), \overline{x}\right)$, $t = 0, \ldots, T-1$ dynamique du barrage ;
- $p(t) = f(x(t), v(t))$ production d'électricité associée au volume turbiné ;
- $d(t)$ demande en électricité ;
- $T = 24$.

Application numérique

Fonction coût

$$p(t) \geq d(t+1) \text{ l'excès de production est revendu}$$
$$p(t) < d(t+1) \text{ déficit compensé par d'autres moyens}$$

En résumé : $L(d(t+1) - p(t), t)$ avec $L(\cdot, t)$ croissante

Application numérique

Production électrique

$$p = f(x, v) = v \times (x + \overline{x} - 2\underline{x})/2(\overline{x} - \underline{x}) \; .$$

$$f(\overline{x}, v) = v \text{ et } f(\underline{x}, v) = \frac{v}{2}$$

Coût intégral

$$L(y, t) = \tau(t + 1)(e^y - 1) \; .$$

Coût final

$$C(x) = 12(x - \overline{x})^2 \; .$$

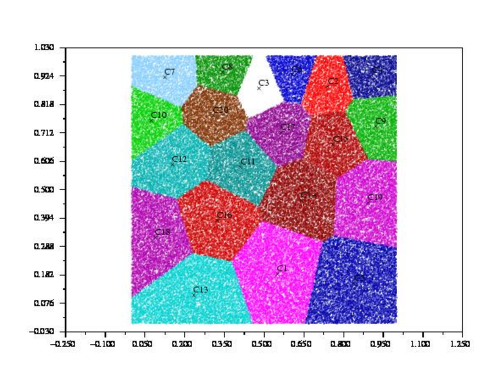
Quantification

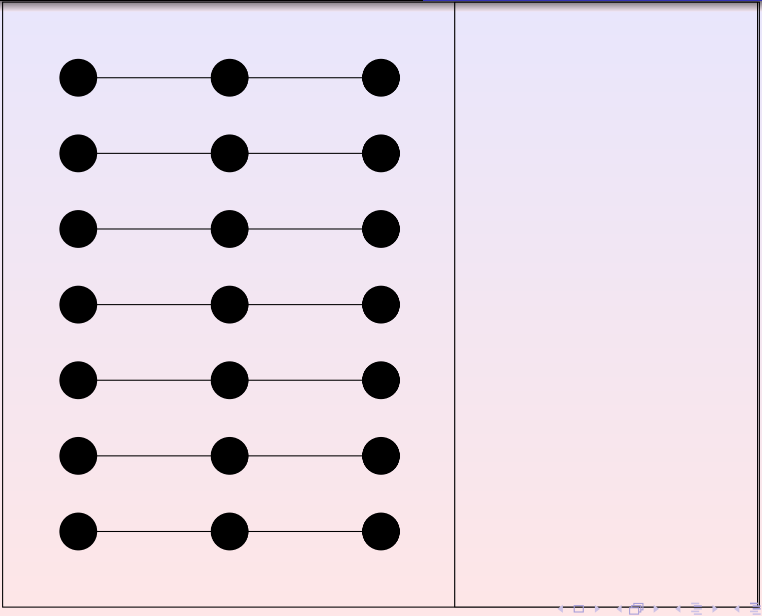
Q quantifie un espace E si
$Q : E \mapsto E$ et
$\mathrm{card}(\ \mathrm{im} Q) < \infty$.

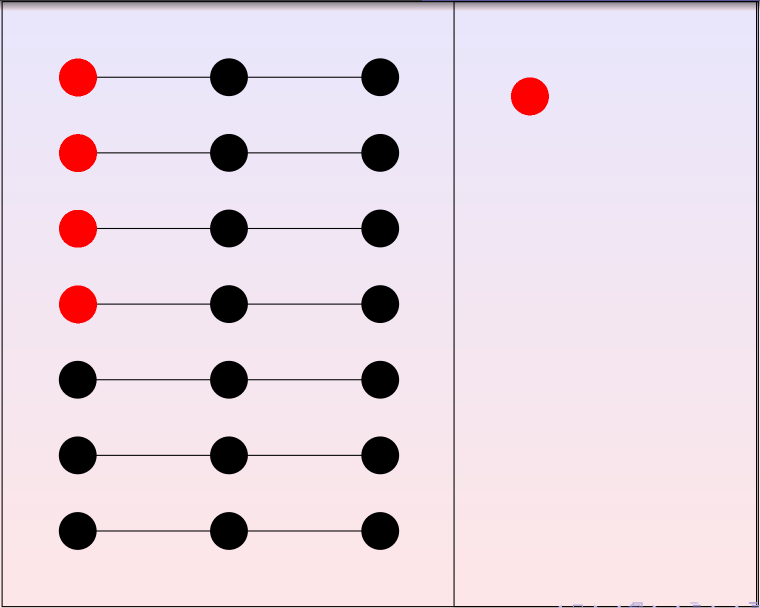
Classification de Voronoï

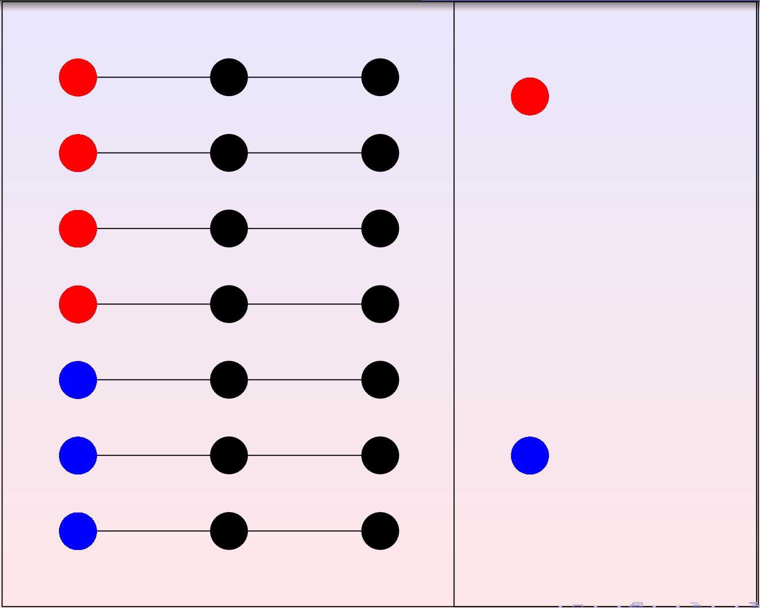
$E = \{v_1, \ldots, v_N\}$

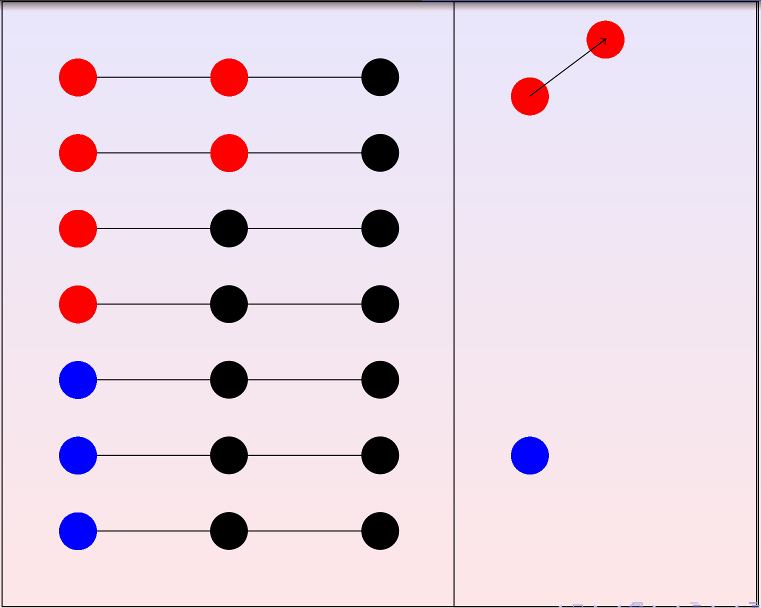
$$\min_{C_i} \min_{x_i} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k \in C_i} \pi_k \, ||x_i - v_k||^2_{\mathbb{R}^2}$$

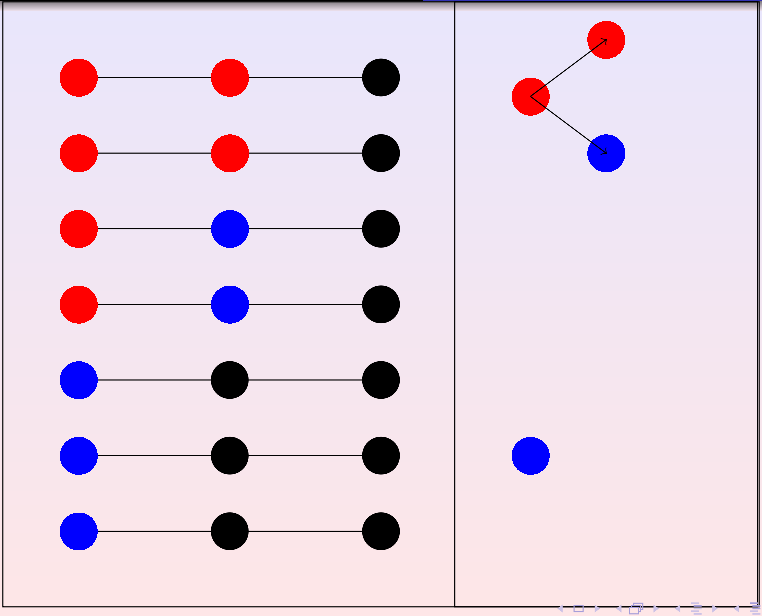


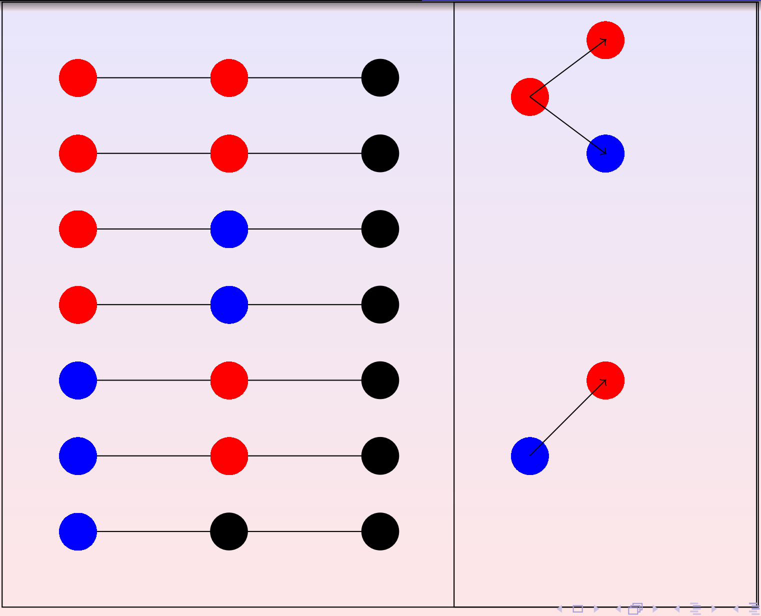


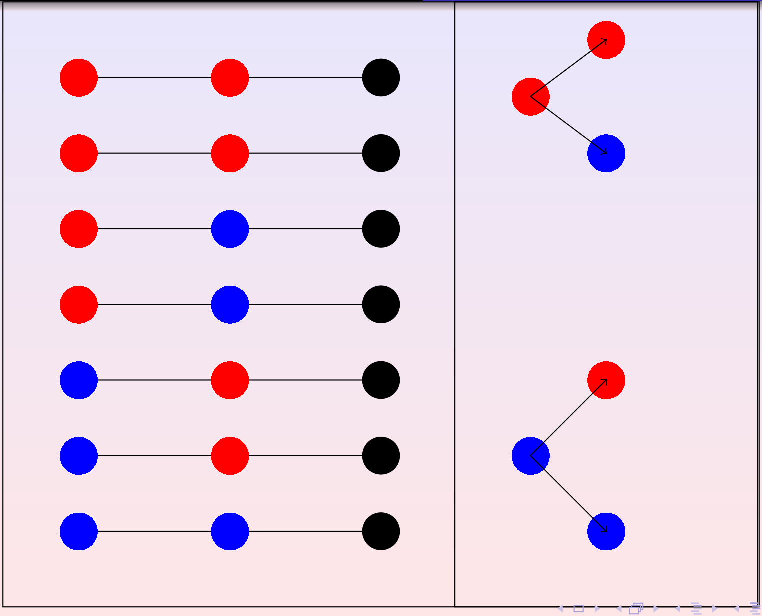


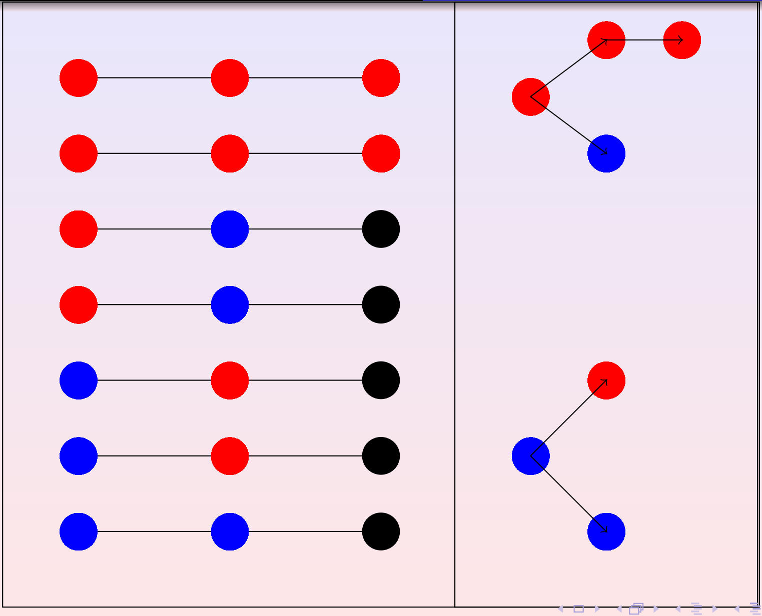


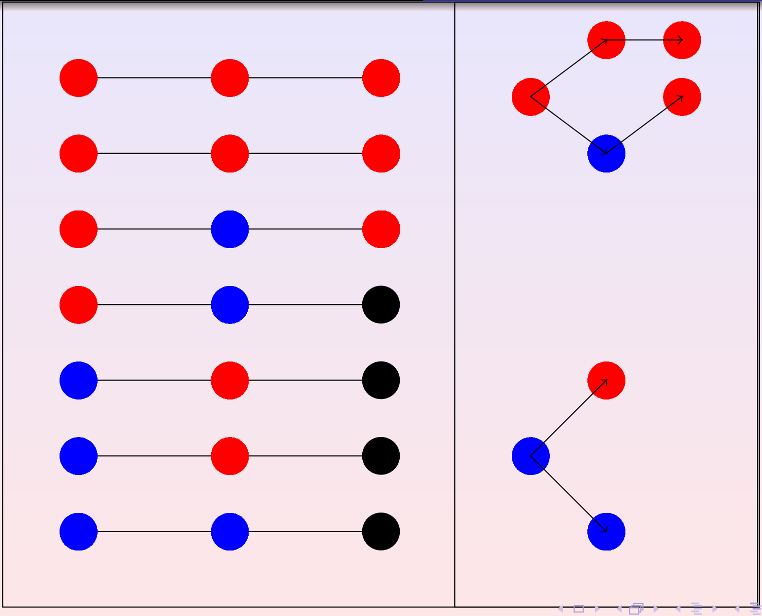


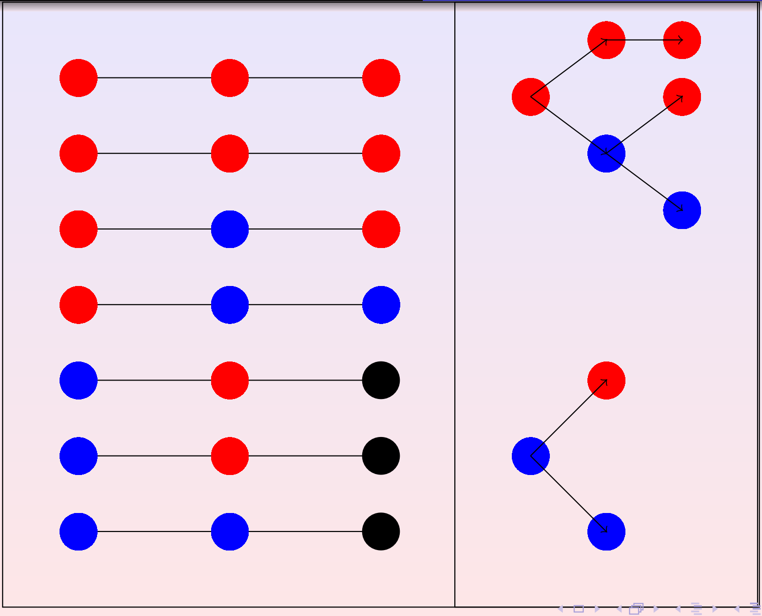


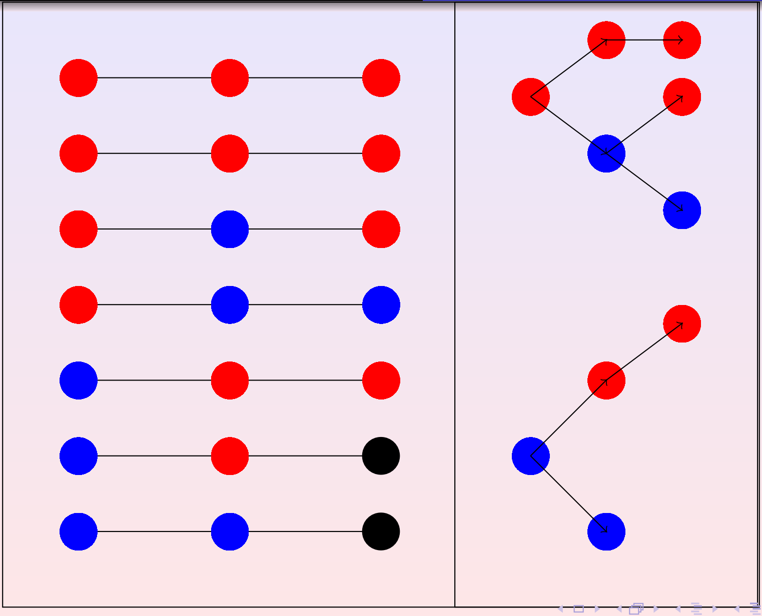


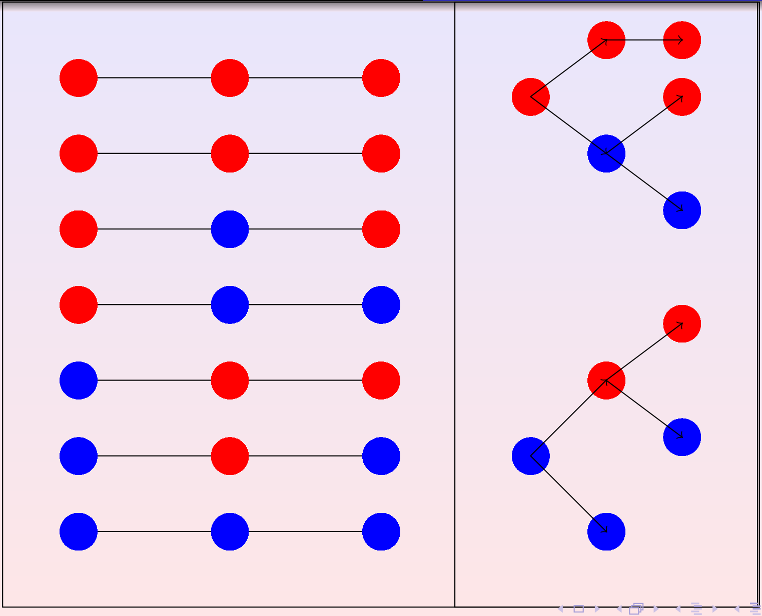


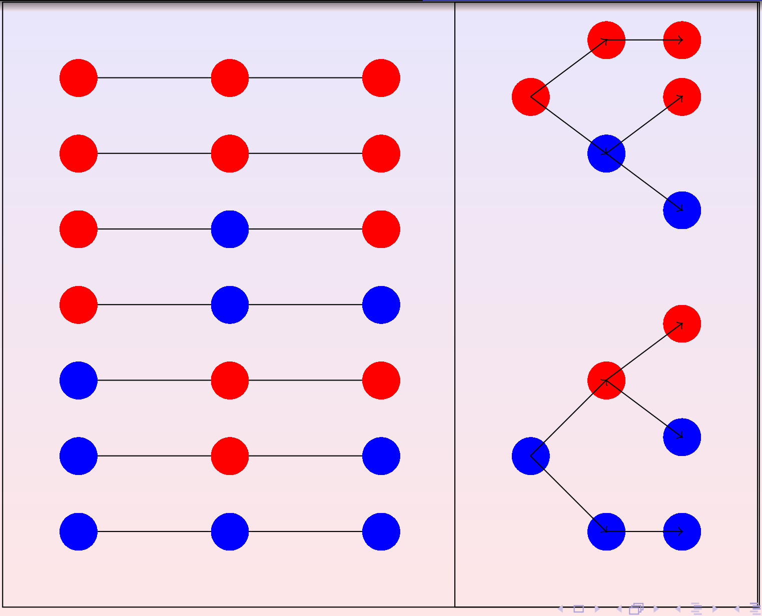


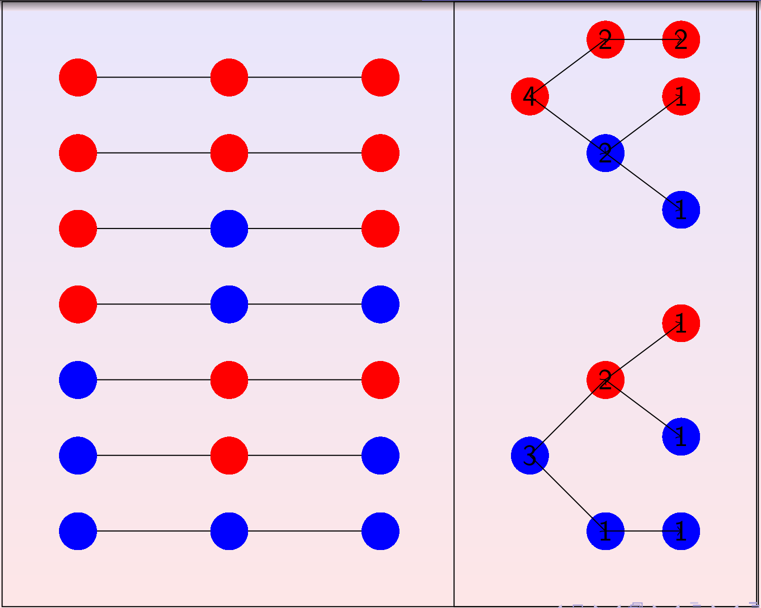




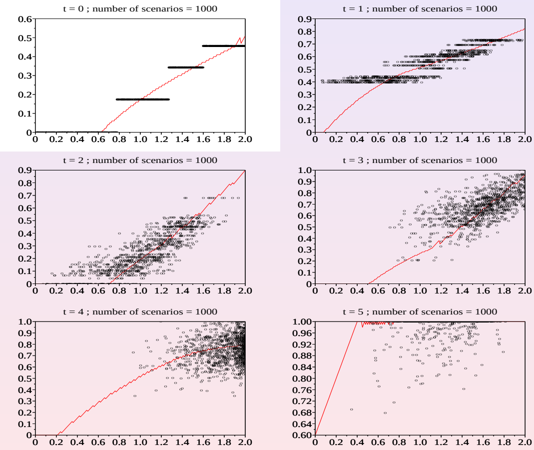







2
2
4
1
2
1
1
2
1
3
1
1

Résultats numériques



Limite de l'approche par quantification

$$u_j = \arg\min \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid Q(h) = y_j\right) \Leftrightarrow u_j = \arg\min \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid C_j\right)$$

$$u_j = f(C_j)$$

La commande optimale discrète est en feedback sur une partition

Limite de l'approche par quantification

$$u_j = \arg\min \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid Q(h) = y_j\right) \Leftrightarrow u_j = \arg\min \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid C_j\right)$$

$$u_j = f(C_j)$$

La commande optimale discrète est en feedback sur une partition

Á savoir !

$$\text{Problème avec contrainte} \begin{cases} \min \mathbb{E} J(u(\xi), \xi) \\ u \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\text{Problème sans contrainte} \begin{cases} \min \mathbb{E} g(u(\xi), \xi) \\ u \text{ mesurable} \end{cases}$$

$$g(u, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(J(u, \xi) \mid \mathcal{B}\right)$$

Á savoir !

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}(u(\xi) - \xi)^2 \\ u \text{ est une v.a mesurable paire sur } [-1, 1] \end{cases}$$

est équivalent à :

$$\begin{cases} \min \mathbb{E}(u(\xi)^2 + \xi^2) \\ u \text{ est une v.a mesurable sur } [-1, 1] \end{cases}$$

d'où :

$$u^*(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in [-1, 1]$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u, \xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u, \xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u, \xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u,\xi), y)$$

$$V^k_n(y) = \min_u \varphi^k_n(J(u,\xi), y)$$

$$|V(y) - V^k_n(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V^k_n(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u,\xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u,\xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u,\xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u,\xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u,\xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u,\xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u, \xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u, \xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u, \xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u, \xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u, \xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u, \xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u, \xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u, \xi), y)$$

$$V^k_n(y) = \min_u \varphi^k_n(J(u, \xi), y)$$

$$|V(y) - V^k_n(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V^k_n(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

$$\mathbb{E}\left(X \mid h = y\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$\varphi^k(X, y) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{E}(XR_i(h))R_i(y)$$

$$V(y) = \min_u \mathbb{E}\left(J(u,\xi) \mid h = y\right) \Rightarrow y \mapsto u(y)$$

$$V^k(y) = \min_u \varphi^k(J(u,\xi), y)$$

$$V_n^k(y) = \min_u \varphi_n^k(J(u,\xi), y)$$

$$|V(y) - V_n^k(y)| \leq \underbrace{|V(y) - V^k(y)|}_{\text{Erreur algébrique}} + \underbrace{|V^k(y) - V_n^k(y)|}_{\text{Erreur de Monte-Carlo}}$$

Conditions d'optimalité

$$u_t^* \in \arg\min_u \mathbb{E}\left(L(x_t, u, \xi_{t+1}, t) + \lambda_{t+1}^\top F(x_t, u, \xi_{t+1}, t) \mid \mathcal{G}_t\right)$$

$$\lambda_T = (K_x^{'})^\top(x_T)$$

$$\lambda_t = (L_x^{'})^\top(x_t, u_t^*, \xi_{t+1}, t) + (F_x^{'})^\top(x_t, u_t^*, \xi_{t+1}, t)\lambda_{t+1}$$

$$\mathcal{G}_t = \sigma(\xi_0, \dots, \xi_t)$$

Première heuristique

Application numérique

$$(\xi_t^i)_{t=0,\dots,T}, \quad i = 1, \dots, N$$

Initialisation

$$(\lambda_t^0(i))_{t=0,\dots,T} \quad i = 1, \dots, N$$

Première heuristique

Minimisation de l'Hamiltonien en chaque nœud du niveau t

$$u_t^{k+1}(j) \in \arg\min_u \sum_{i=1}^{N} \Big(L(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i) + F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i)^\top \lambda_{t+1}^k(i) \Big)$$

$\lambda_{t+1}^k(i)$ sensibilité du coût optimal vis-à-vis d'une perturbation de $x_{t+1}^k(i)$

$$x_{t+1}^k(i) \neq F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i) \Rightarrow \text{ erreur sur état adjoint}$$

Première heuristique

Intégration de la dynamique pour calculer $x_{t+1}^{k+1}(i)$

$$x_{t+1}^{k+1}(i) = F(x_t^k(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i)$$

Première heuristique

Intégration de la dynamique de l'état adjoint

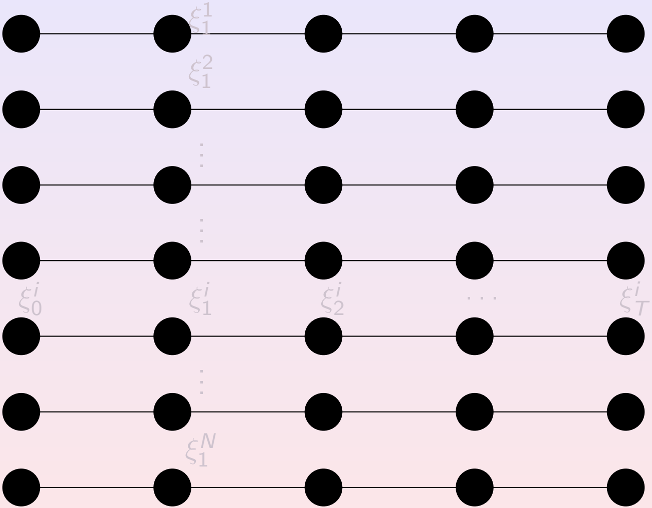
$$\lambda_T^{k+1}(i) = (K_x^{'})^\top (x_T^{k+1}(i))$$

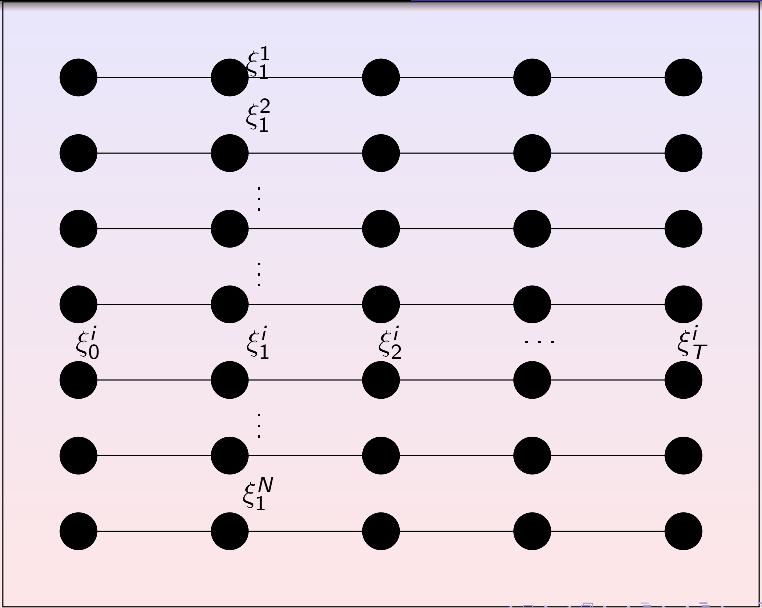
$$\lambda_t^{k+1}(i) = (L_x^{'})^\top (x_t^{k+1}(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i) + (F_x^{'})^\top (x_t^{k+1}(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i) \lambda_{t+1}^{k+1}(i)$$

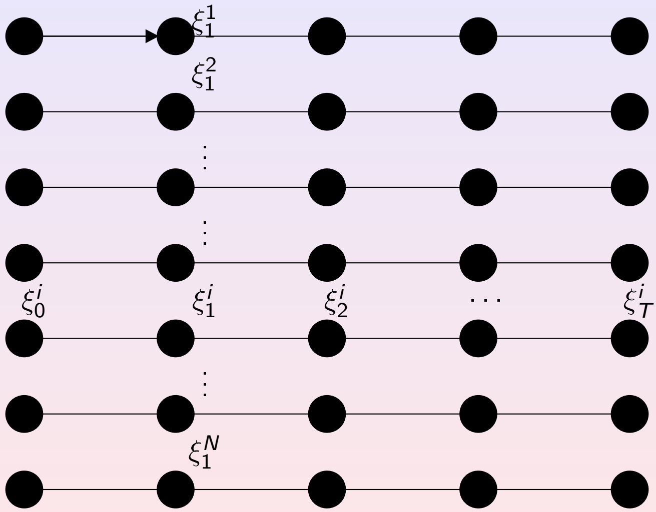
Première heuristique

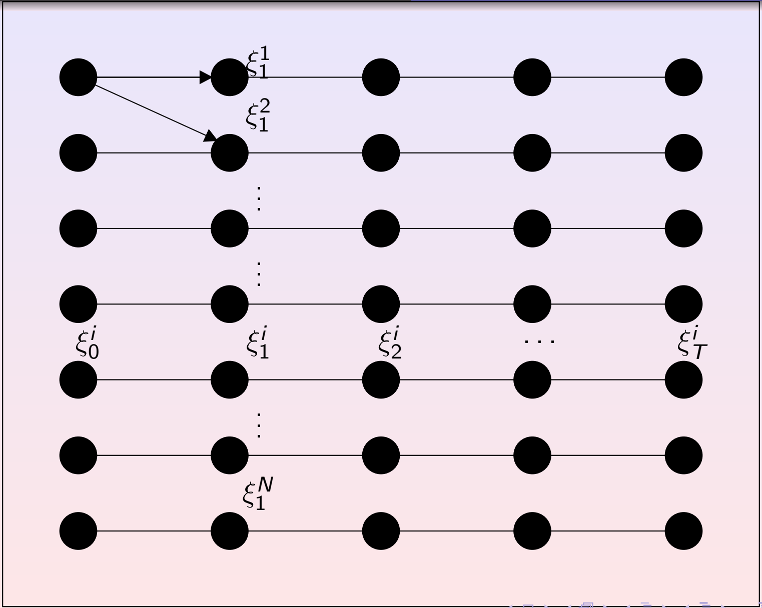
Test d'arrêt

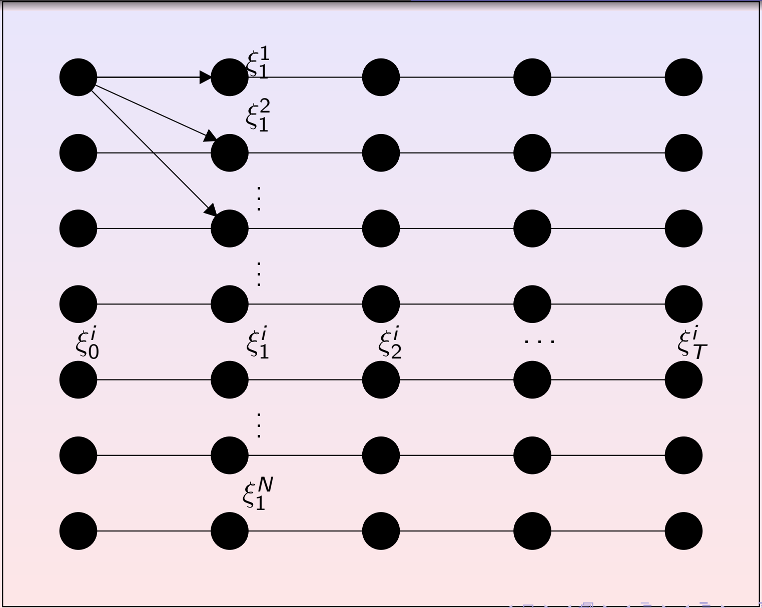
$$\sup_{t,i} \left\| \lambda_t^k(i) - \lambda_t^{k+1}(i) \right\| \leq \varepsilon$$

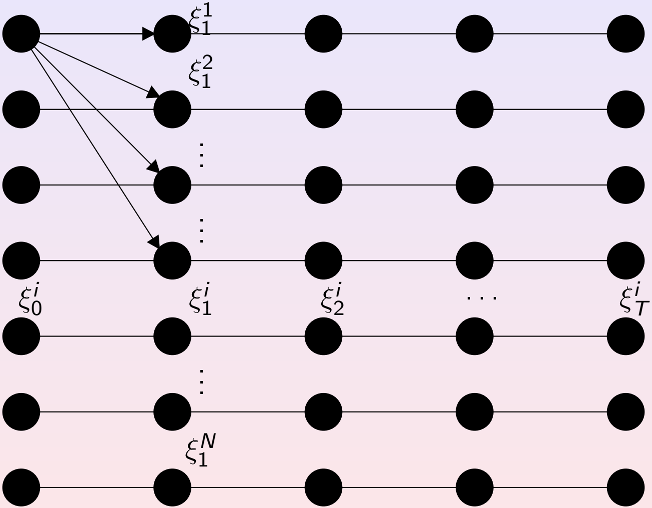

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N

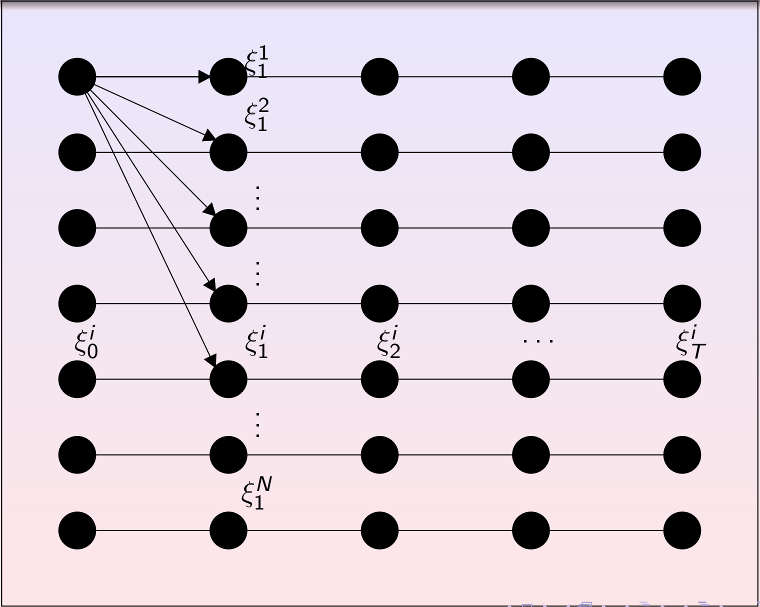

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N

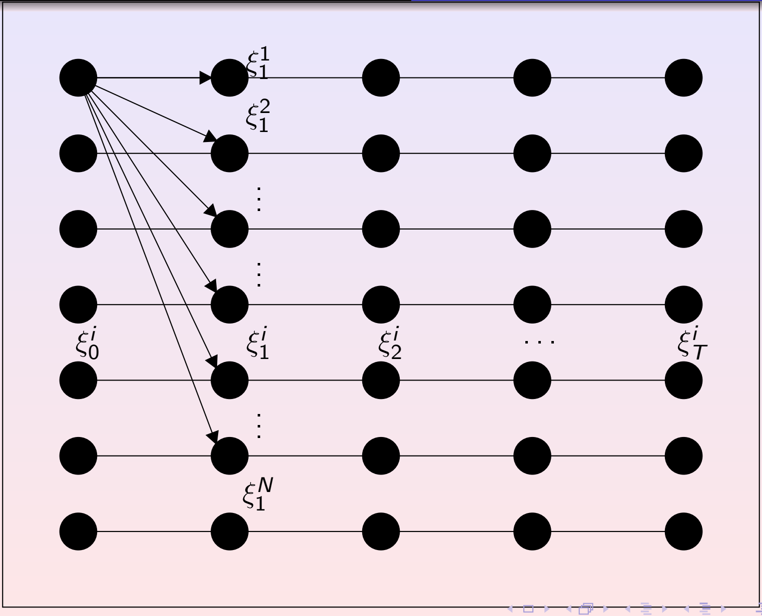

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N

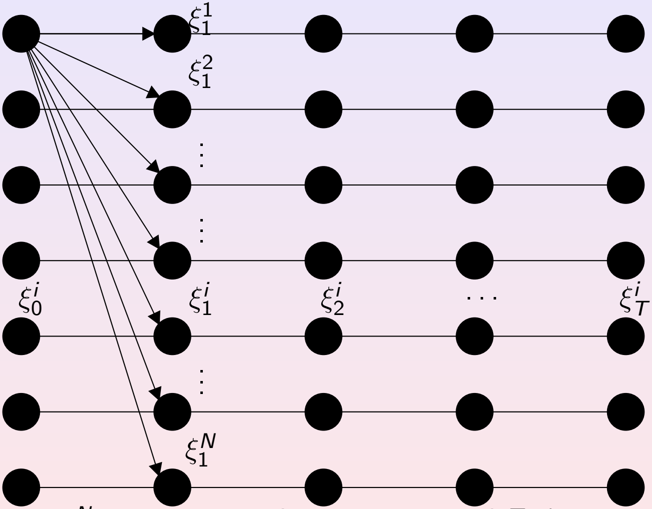

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\cdots$
ξ_T^i
ξ_1^N


ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N

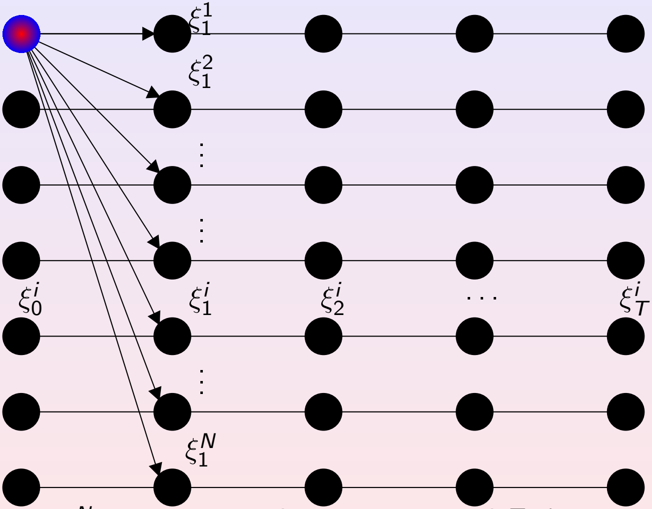

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N


ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
$\dots$
ξ_T^i
ξ_1^N

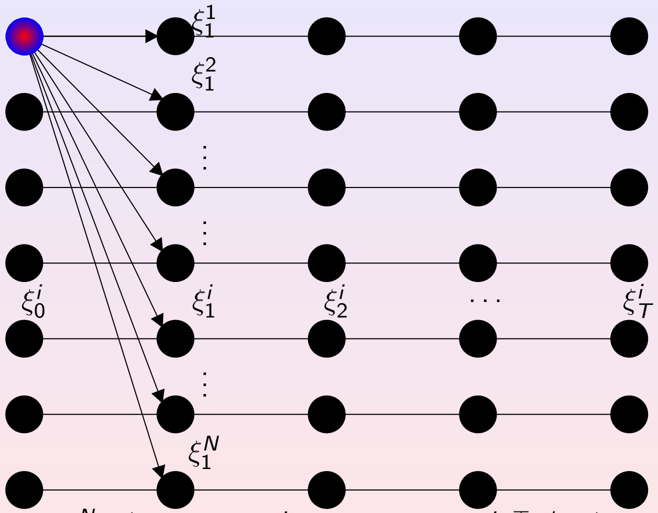

ξ_1^1
ξ_1^2
ξ_0^i
ξ_1^i
ξ_2^i
...
ξ_T^i
ξ_1^N



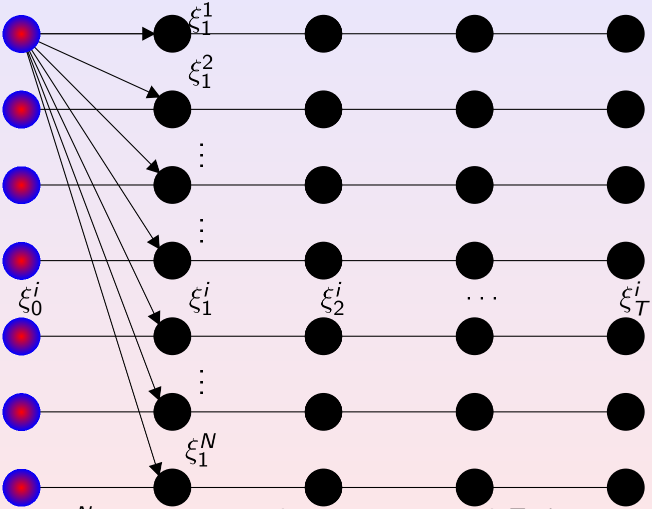
$$\sum_{i=1}^{N} \left(L(x_0(1), u, \xi_1^i) + F(x_0(1), u, \xi_1^i)^\top \lambda_1^k(i) \right)$$



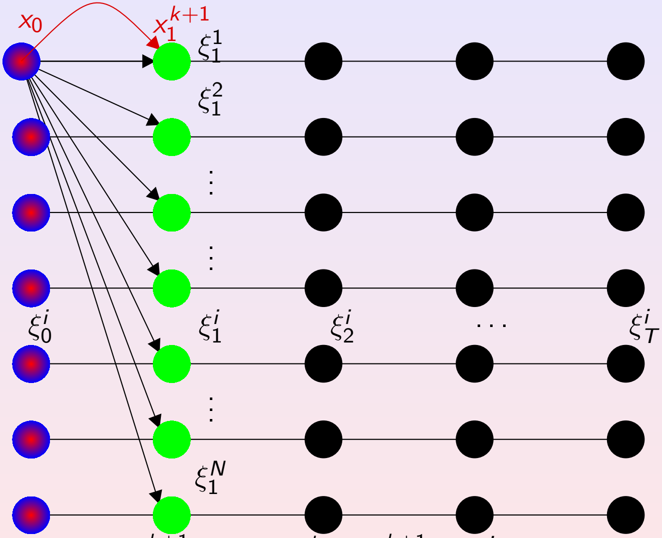
$$\sum_{i=1}^{N} \left(L(x_0(1), u, \xi_1^i) + F(x_0(1), u, \xi_1^i)^\top \lambda_1^k(i)\right)$$



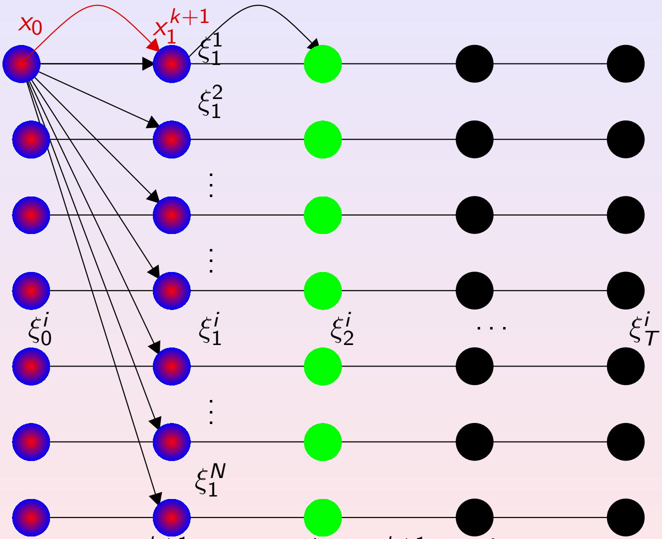
$$\sum_{i=1}^{N}\left(L(x_0(1),u,\xi_1^i)+F(x_0(1),u,\xi_1^i)^\top\lambda_1^k(i)\right)$$



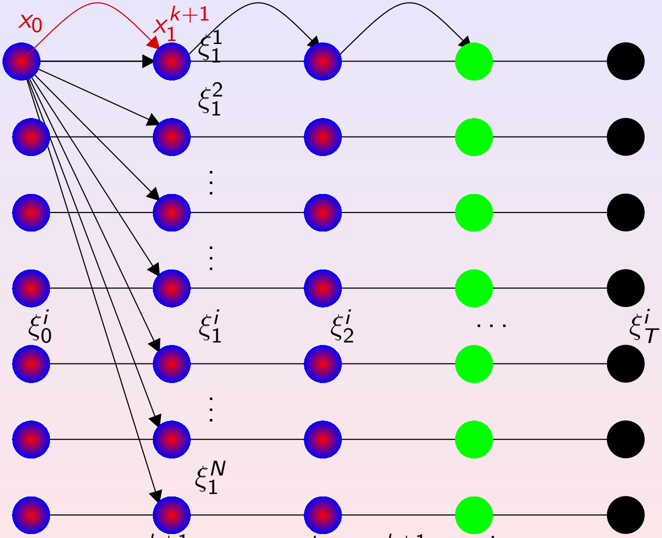
$$\sum_{i=1}^{N} \left(L(x_0(1), u, \xi_1^i) + F(x_0(1), u, \xi_1^i)^\top \lambda_1^k(i) \right)$$



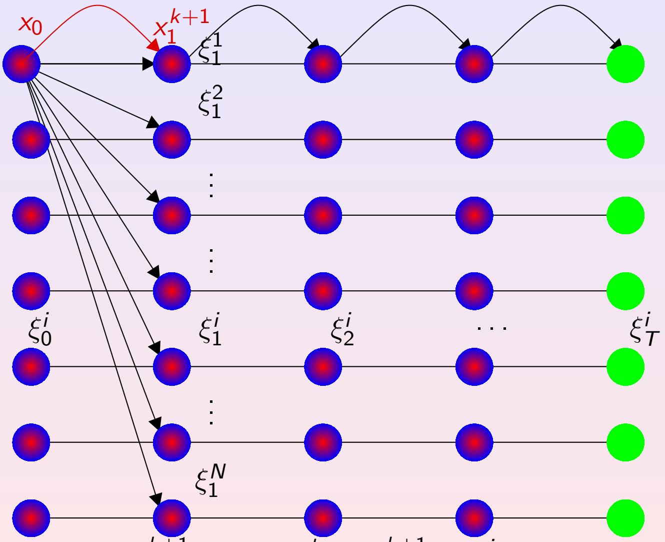
$$x_{t+1}^{k+1}(i) = F(x_t^k(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i)$$



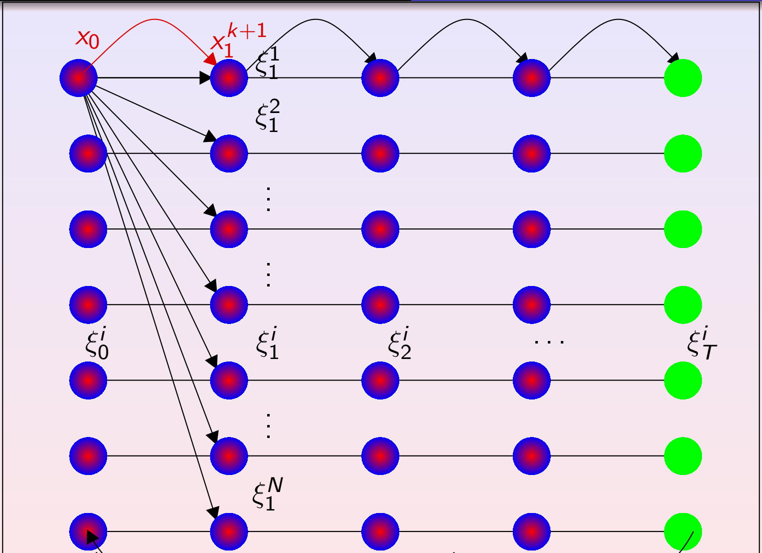
$$x_{t+1}^{k+1}(i) = F(x_t^k(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i)$$



$$x_{t+1}^{k+1}(i) = F(x_t^k(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i)$$

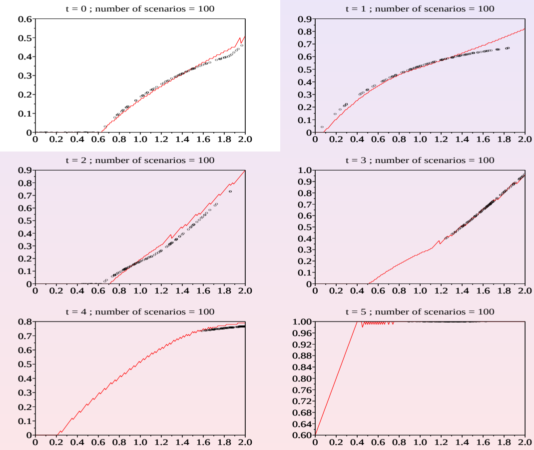


$$x_{t+1}^{k+1}(i) = F(x_t^k(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i)$$



$$\lambda_t^{k+1}(i) = (L_x^{'})^\top (x_t^{k+1}(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i) + (F_x^{'})^\top (x_t^{k+1}(i), u_t^{k+1}(i), \xi_{t+1}^i) \lambda_{t+1}^{k+1}(i)$$

Résultats numériques



Deuxième heuristique (plus proche voisin)

Il faut faire dépendre l'état adjoint de l'état vers lequel on arrive

$$x(u) = F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i)$$

si $\left|\left|x(u) - x_{t+1}^k(\ell)\right|\right| \leq \left|\left|x(u) - x_{t+1}^k(i)\right|\right| \quad \forall i \neq \ell$ alors $\lambda(u) = \lambda_{t+1}^k(\ell)$

$$u_t^{k+1}(j) \in \arg\min_u \sum_{i=1}^N \Big(L(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i) + F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i)^\top \lambda(u) \Big)$$

Problème $u \mapsto \lambda(u)$ n'est pas différentiable !

Deuxième heuristique (plus proche voisin)

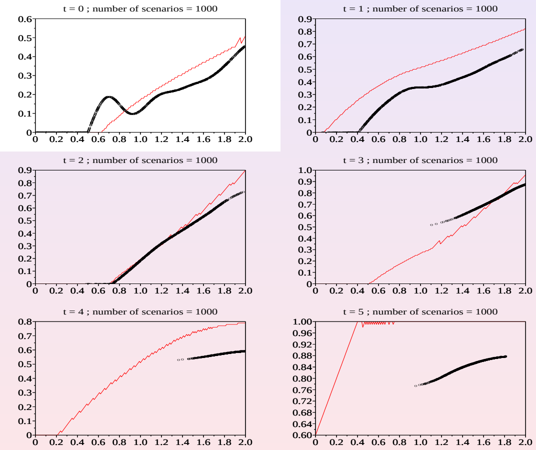
Il faut faire dépendre l'état adjoint de l'état vers lequel on arrive

$$x(u) = F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i)$$

si $\left\|x(u) - x_{t+1}^k(\ell)\right\| \leq \left\|x(u) - x_{t+1}^k(i)\right\| \quad \forall i \neq \ell$ alors $\lambda(u) = \lambda_{t+1}^k(\ell)$

$$u_t^{k+1}(j) \in \arg\min_u \sum_{i=1}^{N} \Big(L(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i) + F(x_t^k(j), u, \xi_{t+1}^i)^\top \lambda(u_t^k(j)) \Big)$$

Résultats numériques



Conclusions

- Contrairement à la programmation dynamique, il n'y a pas de discrétisation de la variable d'état, celui-ci évolue à son gré et explore certaines parties de l'espace ;
- La commande optimale s'adapte aux observations et non à des partitions ;
- Il n'y a pas de résultats asymptotique de convergence.